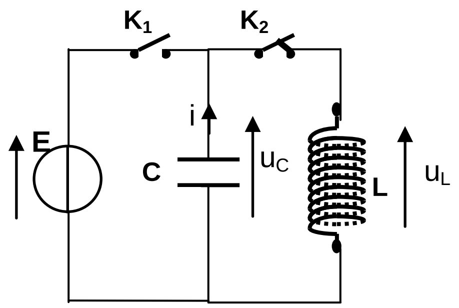
Production des oscillations électriques libres non amorties

L'interrupteur K_1 est fermé, K_2 est ouvert

On considère le circuit électrique schématisé ci-dessous, lorsque le condensateur se charge complètement, sa charge est maximale Q_{max}. D'après la loi des mailles :

$u_G - u_C = 0$



$$E - \frac{Q_{max}}{C} = 0$$

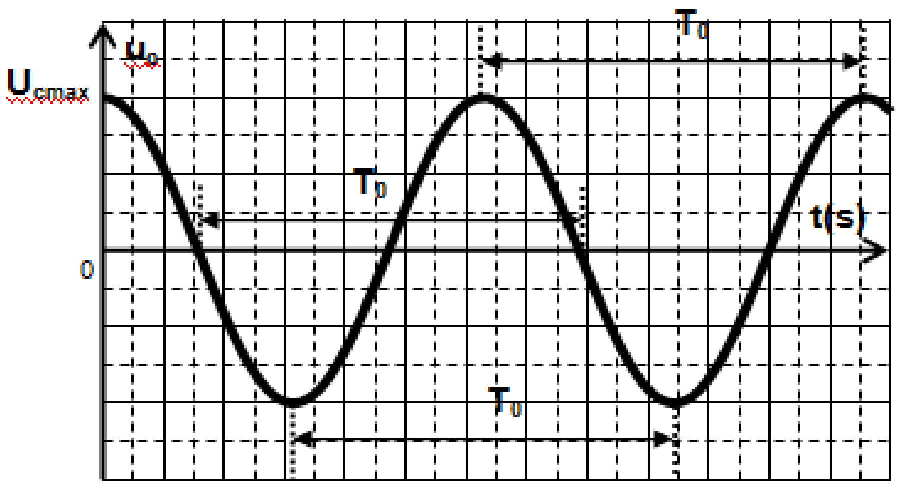
$$\boxed{Q_{max} = CE}$$

L'énergie électrique emmagasinée par le condensateur est

$$\boxed{E_e = \frac{1}{2}\frac{Q_{max}^2}{C} = \frac{1}{2}CE^2 \text{ avec } E : \text{f.e.m}}$$

L'interrupteur K_1 est ouvert, K_2 est fermé

Le condensateur se décharge dans une inductance pure, on obtient des oscillations électriques libres non amorties(oscillations sinsoïdales). Voila les variations de la tension u_c aux bornes du condensateur :



Avec T_0 est la période propre du circuit LC.

Equation différentielle

d'après la loi des mailles (K_1 est ouvert et K_2 est fermé) : la décharge du condensateur dans une inductance pure.

$u_c + u_L = 0$ $\quad \frac{q}{C} + L\frac{di}{dt} = 0$ or $i = \frac{dq}{dt}$ donc $\frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$ $\quad \frac{q}{C} + L\frac{d^2q}{dt^2} = 0$

$$\boxed{\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{LC} = 0}$$

Equation différentielle des oscillations électriques libres non amorties de pulsation propre ω_0 tel que $\boxed{\omega_0^2 = \frac{1}{LC}}$ **et de période propre** $\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}}$

Solution de l'équation différentielle

L'équation différentielle précédente a pour solution :

$\boxed{q(t) = Q_{max}\sin(\omega_0 t + \varphi_q)}$ **avec :**

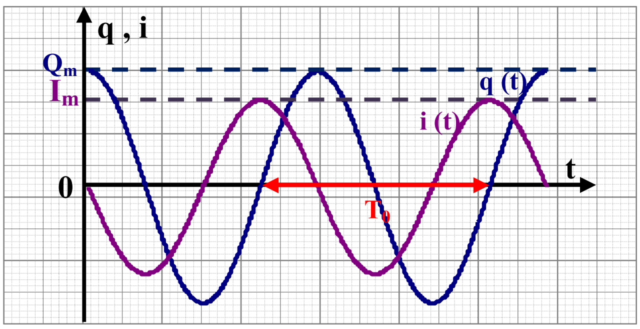
Q_{max} : amplitude.
$\omega_0 t + \varphi_q$: phase de la charge q(t) à la date t.
φ_q : phase initiale de la charge q(t).(phase à t=0)
On peut avoir de même l'expression de $i(t) = \frac{dq}{dt}$ **:**

Expression de i(t)

$i(t) = \frac{dq}{dt}$ **$i(t) = \omega_0 Q_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi_q) = \omega_0 Q_{max}\sin(\omega_0 t + \varphi_q + \pi/2)$.**

Or i(t) comme toute fonction sinusoïdale elle s'écrit sous la forme

$$\boxed{i(t) = I_{max}\sin(\omega_0 t + \varphi_i)}$$



$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$$
$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$
$$N_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

D'après le graphe, on remarque que lorsque :

$\boxed{q = \pm Q_{max}\ ;\ i = 0}$ **et** $\boxed{i = \pm I_{max}\ ;\ q = 0}$ **càd lorsque :**

le condensateur est complètement chargé, la bobine est vide.
le condensateur est vide, le courant dans la bobine atteint sa valeur maximale.

Solutions :

$$u_C(t) = U_{Cm}\sin(\omega_0 t + \varphi_{u_C})$$

$$q(t) = Q_m\sin(\omega_0 t + \varphi_q)$$

$$\begin{cases} Q_m = CU_{Cm} \\ \varphi_{u_C} = \varphi_{u_C} \\ q(t)\,et\,u_C(t)\,sont\ en\ phase \end{cases}$$

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \mathrm{I}_m\sin(\omega_0 t + \varphi_i)$$

$$\begin{cases} I_m = \omega_0 Q_m \\ \varphi_i = \varphi_q + \dfrac{\pi}{2} \\ i(t)\ \ est\ en\ avance\ qudrature\ de\ phase\ par\ rapport\ à\ q(t) \end{cases}$$

Conservation de l'énergie électrique

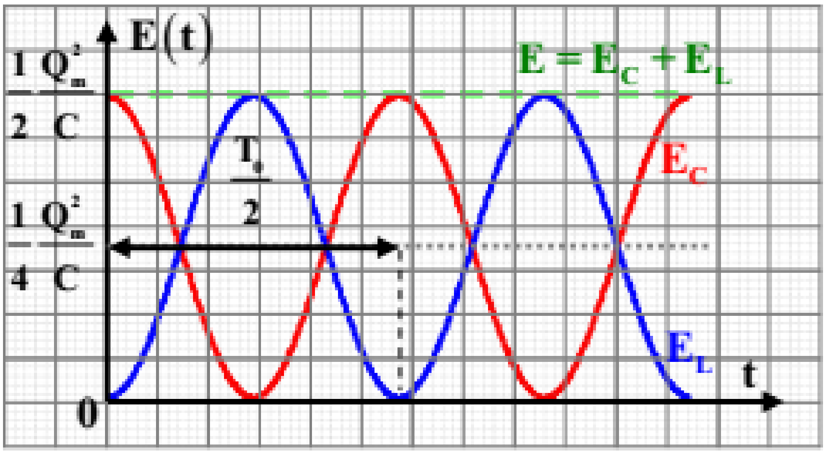
$E = E_e + E_L$, l'énergie électrique peut être notée E_e ou E_c.

$$E = \frac{q^2}{2C} + \frac{Li^2}{2} \qquad E = \frac{Q^2_{max}}{2C}\sin^2(\omega_0 t + \varphi_q) + L\omega_0^2 Q^2_{max}\cos^2(\omega_0 t + \varphi_q) \text{ or } \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

$$E = \frac{Q^2_{max}}{2C}\sin^2(\omega_0 t + \varphi_q) + L\frac{1}{LC}Q^2_{max}\cos^2(\omega_0 t + \varphi_q)$$

$$= \frac{Q^2_{max}}{2C}\underbrace{(\sin^2(\omega_0 t + \varphi_q) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi_q))}_{=1}$$

$\boxed{E = \frac{1}{2C}Q^2_{max}}$ or $\frac{1}{C} = L\omega_0^2$ donc $E = \frac{L}{2}\omega_0^2 Q^2_{max}$ et comme $I_{max} = \omega_0 Q_{max}$ d'où : $\boxed{E = \frac{1}{2}LI^2_{max}}$



Energie Electromagnétique

$$\begin{cases} E_T = E_{Cm} = E_{Lm} \\ E_T = \dfrac{Q_m^{\ 2}}{2C} \\ E_T = \dfrac{1}{2}CU^{2}_{Cm} \\ E_T = \dfrac{1}{2}L\,I^{2}_{m} \end{cases}$$

L'énergie électromagnétique E de l'oscillateur se conserve . On a alors une conversion mutuelle et intégrale de l'énergie magnétique en énergie électrique et inversement.

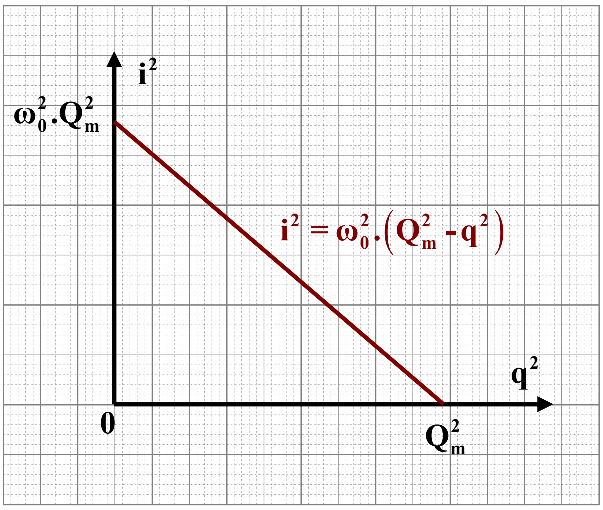
Pour un même circuit, l'énergie emmagasinée est proportionnelle au carrée de la l'amplitude.
Pour une même énergie emmagasinée, les oscillations à hautes fréquences sont de faibles amplitudes.

Remarques :

- $E = E_C + E_L \rightarrow E_L = E - E_C \rightarrow E_L = -\dfrac{1}{2.C}.q^2 + E$

$\dfrac{1}{2}.L.i^2 = -\dfrac{1}{2.C}.q^2 + \dfrac{Q_m^2}{2.C} \rightarrow i^2 = -\dfrac{1}{L.C}.\left(q^2 - Q_m^2\right)$

$\omega_0^2 = \dfrac{1}{L.C} \rightarrow i^2 = -\,\omega_0^2.\left(q^2 - Q_m^2\right)$



Remarque :

$$q^2 = -\frac{1}{\omega_0^2}.\left(i^2 - I_m^2\right) \xrightarrow{I_m=\omega_0.Q_m} q^2 = -\frac{i^2}{\omega_0^2} + Q_m^2 \rightarrow -\frac{i^2}{\omega_0^2} = \left(q^2 - Q_m^2\right) \text{ et } i^2 = -\omega_0^2.\left(q^2 - Q_m^2\right).$$

- Dans le cas où $E_C = E_L \rightarrow E_C = \frac{E}{2}$

$$\rightarrow \frac{1}{2}.\frac{q^2}{C} = \frac{1}{4}.\frac{Q_m^2}{C}$$

$$\rightarrow q^2 = \frac{Q_m^2}{2}$$

donc on a : $E_C = E_L$ pour $q = \pm\frac{Q_m}{\sqrt{2}}$